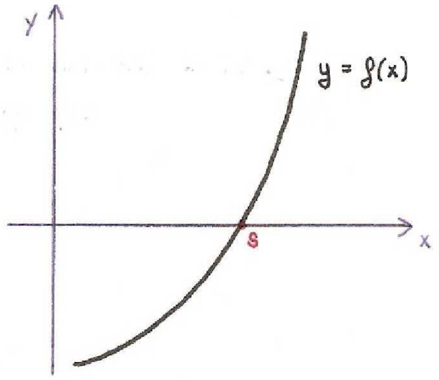
(8/1/2008)

TEMA 4: ECUACIONES NO LINEALES.

En este tema nos vamos a ocupar de determinar las raíces (ceros) de una función (de una ecuación no lineal).



Una ecuación no lineal es del tipo $y = f(x)$ y tiene una gráfica, por ejemplo, como ésta

$f(s) = 0 \rightarrow s$ es una raíz de la función.

En realidad nosotros no vamos a llegar a calcular exactamente la raíz, sino que nos quedaremos con una aproximación, que llamaremos x_n:

$x_n \simeq s$ → ¿Cómo hallamos la aproximación? Mediante métodos de resolución.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN:

1º MÉTODOS GEOMÉTRICOS → Se aplican directamente a $y = f(x)$.

a) DICOTOMÍA o PUNTO MEDIO o BISECCIÓN.

b) MÉTODOS INTERPOLATORIOS.

- b.1) REGULA FALSI.
- b.2) SECANTE.

2º MÉTODOS ITERATIVOS → No se aplican directamente a $y = f(x)$. Hay que pasar de la ecuación $y = f(x)$ a otra equivalente del tipo $x = g(x)$. A partir de una hipótesis inicial para la raíz (x_0), aplicando reiteradamente $g(x)$ a los puntos que vamos obteniendo, se crea la sucesión: $x_1 = g(x_0), \dots, x_n = g(x_{n-1})$

a) LINEALES.

b) NEWTON-RAPHSON → A veces no se puede aplicar. Entonces se utiliza el método de la secante.

1. MÉTODO DE LA BISECCIÓN.

a) Condiciones iniciales:

$y = f(x)$ → Función de la que se quiere hallar la raíz.
↳ aproximadamente

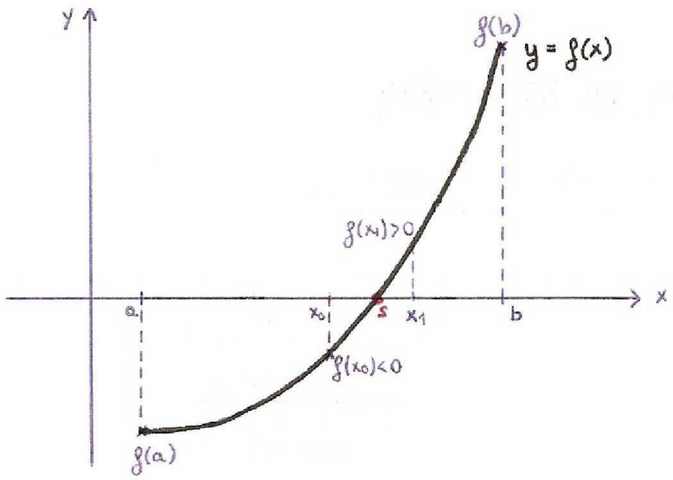
$s \in [a,b]$ → El intervalo debe contener la raíz s de $f(x)$.
→ Si no nos dan el intervalo, hay que hallarlo.

¿Qué tiene que cumplir el intervalo? ⊛

1.- Tª DE BOLZANO → $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [a,b]$

2.- UNICIDAD → $\exists\, f'(x)_{[a,b]} \neq 0 \Rightarrow$ Única $s \in [a,b]$

Comprobamos las condiciones y, si se cumplen, podemos empezar a aplicar el método.



⊛ La condición 1 me dice si la raíz s está en el intervalo $[a,b]$ y la condición 2 me dice si la raíz es única.

b) Aplicación del método:

El método consiste en ir dividiendo el intervalo en 2 mitades. En cada mitad se comprueba Bolzano, y nos quedamos con el intervalo donde se cumpla, pues en él se encontrará la raíz s.

$$1^{\circ})\quad x_0 = \frac{a+b}{2} \quad \begin{cases} [a, x_0] \longrightarrow f(a)\cdot f(x_0) > 0 & \text{No vale} \\ [x_0, b] \longrightarrow f(x_0)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [x_0, b] \end{cases}$$

$$2^{\circ})\quad x_1 = \frac{x_0+b}{2} \quad \begin{cases} [x_0, x_1] \longrightarrow f(x_0)\cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow s \in [x_0, x_1] \\ [x_1, b] \longrightarrow f(x_1)\cdot f(b) > 0 & \text{No vale} \end{cases}$$

⋮

c) Convergencia:

- LENTO → En cada paso el error se reduce sólo por un factor 0'5.
- CIEGO → Esto quiere decir que en la estimación de la raíz no se utiliza información de la función y, si por suerte, en algún momento nos aproximamos mucho a la raíz en alguna estimación intermedia, el método no es capaz de aprovecharse de ello.

d) Exactitud:

Es el único método iterativo que tiene una fórmula para su cota de error:

En el paso n-esimo tenemos el intervalo $\frac{b-a}{2^n}$ y la raíz debe estar dentro de dicho intervalo:

$$\boxed{|e_n| = |x_n - s| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{2^n} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}}$$

→ Distancia máxima entre nuestra estimación x_n y la raíz s (desconocida).

e) **Aplicabilidad:**

Es un método seguro pero lento, frente a otros métodos mucho más rápidos pero de convergencia incierta.

La bisección no es aplicable si $f(a) \cdot f(b) > 0$ (tienen el mismo signo), por lo que no funciona para hallar raíces dobles.

Este método se utiliza básicamente para acotar la raíz en un intervalo de pequeña longitud ($[\ ] < 0'001$) antes de aplicar otros métodos más rápidos.

2. MÉTODO DE LA REGULA FALSI.

a) **Condiciones iniciales:**

$y = f(x)$ → Función de la que se quiere hallar la raíz.
↳ aproximadamente

$f(s) = 0$

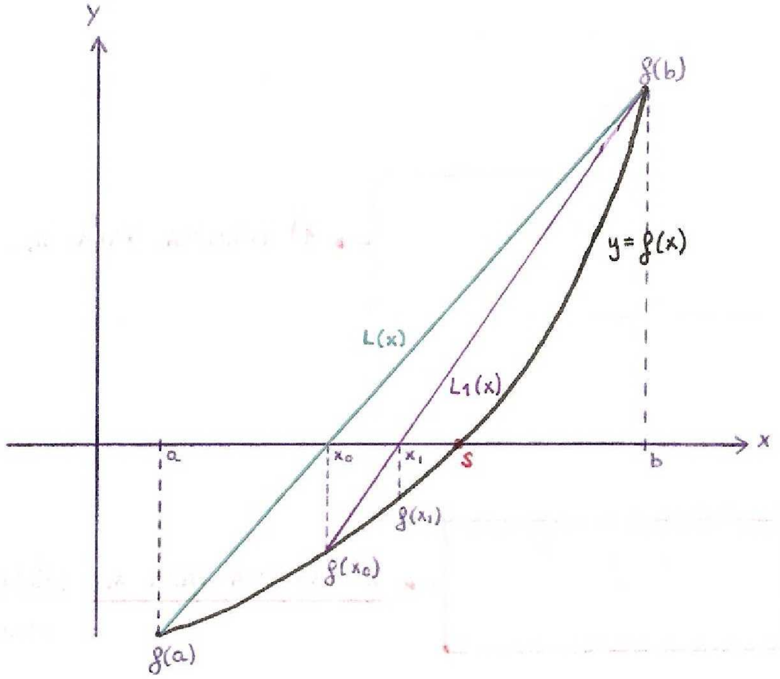
$s \in [a, b]$ → Tenemos que tener un intervalo que contenga la raíz. Si no nos lo dan tendremos que hallarlo.

¿Qué tiene que cumplir el intervalo?

1.- Tª DE BOLZANO → $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [a, b]$

2.- UNICIDAD → $f'(x) \gtrless 0 \Rightarrow \exists\, s$ única $\in [a, b]$

Comprobamos las condiciones y, si se cumplen, podemos empezar a aplicar el método.



b) Aplicación del método:

Este método consiste en aproximar $f(x)$ por una función lineal $L(x)$, que pasa por los puntos $f(a)$ y $f(b)$ (imágenes de los extremos del intervalo). Donde $L(x)$ corte al eje X tendré la primera división x_0. Entonces se aplica Bolzano para saber qué subintervalo debo utilizar para seguir aplicando el método.

$$f(x) \equiv L(x) = f(a) + f(a).(x-a)$$

$$f'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\boxed{L(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

$L(x) = 0 \implies x = x_0$ (Vemos en el gráfico que $L(x)$ sólo se anula en x_0).

$$0 = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) \; ; \quad -f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) \; ;$$

$$-f(a)(b-a) = [f(b)-f(a)](x_0-a) \; ; \quad \frac{-bf(a)+af(a)}{f(b)-f(a)} = (x_0-a) \; ;$$

→

Se obtienen así las fórmulas de la primera aproximación de la raíz s:

$$\boxed{x_0 = a - \frac{[b f(a) - a f(a)]}{f(b) - f(a)}} \rightarrow \text{1ª FÓRMULA PARA } x_0.$$

Seguimos operando: $x_0 = \dfrac{a f(b) - \cancel{a f(a)} - b f(a) + \cancel{a f(a)}}{f(b) - f(a)}$;

$$\boxed{x_0 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}} \rightarrow \text{2ª FÓRMULA PARA } x_0$$

(Ésta es la que se suele utilizar).

¿En qué subintervalo debemos continuar? Aplicamos Bolzano:

$$x_0 \begin{cases} [a, x_0] \rightarrow f(a) \cdot f(x_0) > 0 \Rightarrow s \notin [a, x_0] \\ [x_0, b] \rightarrow f(x_0) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [x_0, b] \end{cases}$$

Usaremos entonces el intervalo $[x_0, b]$ para la próxima iteración. La nueva aproximación de la raíz se obtiene, como en el primer caso, uniendo los extremos del intervalo. Donde esta recta corte al eje X, será x_1:

$$x_1 \rightarrow L_1(x) \begin{cases} [x_0, f(x_0)] \\ [b, f(b)] \end{cases} \qquad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

$\vdots$ (Sucesivas iteraciones)

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-1} f(b) - b f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}} \quad \text{FÓRMULA GENERAL}$$

c) Convergencia:

* LENTO → Es un método lento pero robusto, pues convergerá siempre que exista una raíz en el intervalo de partida.
* NO CIEGO → Como en lugar de partir el intervalo por la mitad, lo dividimos por el punto de corte con el eje X de la recta uniendo los extremos del intervalo, ahora sí usamos información sobre la función al decidir el siguiente punto.

d) Exactitud:

No existe ninguna fórmula que me diga el error cometido en cada aproximación.

ERROR → $\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \xi}$

Esta cota de error me la dan en el enunciado.

e) Aplicabilidad:

Se utiliza como método previo para aislar la raíz en un intervalo pequeño antes de aplicar métodos más rápidos.

3. MÉTODO DE LA SECANTE.

a) Condiciones iniciales:

$y = f(x) \longrightarrow x_n \simeq s \;/\; f(s) = 0$

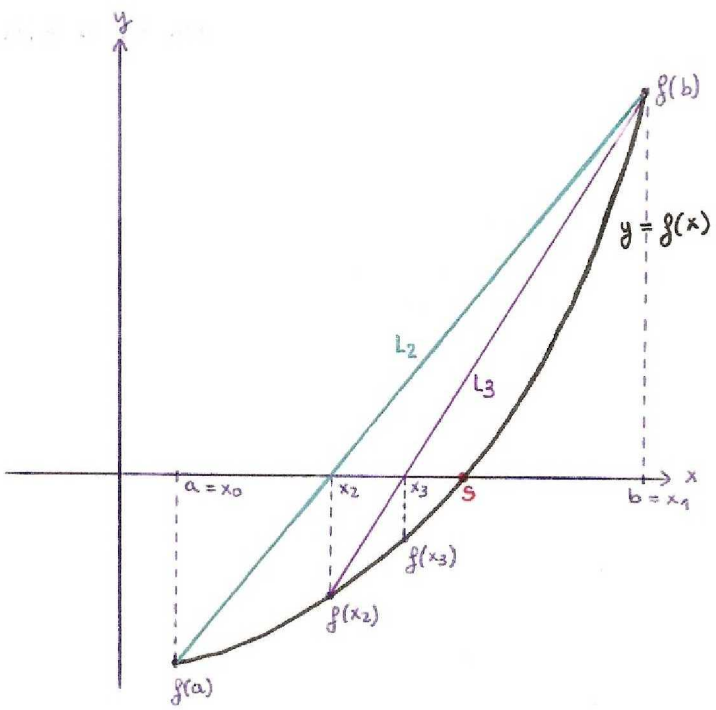
$[a, b] \longrightarrow$ El intervalo debe contener la raíz s.

¿Qué tiene que cumplir el intervalo?

1.- Tª DE BOLZANO $\longrightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [a,b]$

2.- UNICIDAD $\longrightarrow f'(x) \lessgtr 0 \Rightarrow \exists$ única $s \in [a,b]$

Comprobamos las condiciones y, si se cumplen, podemos empezar a aplicar el método.



b) Aplicación del método:

Para aplicar este método empezamos con 2 puntos iniciales x_0 y x_1. A partir de ahí, utilizaremos como aproximación de s (raíz de $f(x)$) la raíz (donde corta al eje X) de la recta (aproximación lineal L) que pasa por los 2 puntos anteriores: $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.

$$x_0 = a$$
$$x_1 = b$$

$$L_2 = \Big((a, f(a)) , (b, f(b)) \Big) \longrightarrow x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$L_3 = \Big((x_1, f(x_1)) , (x_2, f(x_2)) \Big) \longrightarrow x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$L_n = \Big((x_{n-2}, f(x_{n-2})) , (x_{n-1}, f(x_{n-1})) \Big)$$

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-2} f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}$$

FÓRMULA GENERAL

c) Convergencia:

* La convergencia no está asegurada. No es un método seguro.
* Si converge, lo hace rápidamente.
* Hay que evaluar diferencias que van siendo cada vez más pequeñas (por ejemplo: $f(x_n) - f(x_{n-1})$), por lo que pueden aparecer problemas de redondeo.

d) **Exactitud:**

$\nexists$ fórmula de error.

e) **Aplicabilidad:**

Cuando el método de Newton-Raphson da problemas (a causa de las derivadas o de raíces dobles) se utiliza el método de la secante.

RESUMEN MÉTODOS GEOMÉTRICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES.

	FÓRMULA	CONVERGENCIA	VELOCIDAD	COTA ERROR	APLICACIÓN
BISECCIÓN	$x_0 = \frac{a+b}{2}$ $f(x_0) \gtrless 0$	ASEGURADA	MUY LENTO	$\lvert e_n \rvert = \frac{b-a}{2^{n-1}} \leq \xi$	PRELIMINAR
REGULA FALSI	$x_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ $f(x_0) \gtrless 0$	ASEGURADA	LINEAL $\simeq 1$	$\lvert e_n \rvert = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert \quad \xi$	PRELIMINAR $[\,] \leq 0'001$
SECANTE	$x_n = \frac{\left(x_{n-2} \cdot f(x_{n-1}) - - x_{n-1} \cdot f(x_{n-2})\right)}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$	NO ASEGURADA	RÁPIDO $\simeq 1'61$	$\lvert e_n \rvert = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert \leq \xi$	SUSTITUTO DE NEWTON-RAPHSON $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

El método de la secante se puede considerar un método iterativo, pues cada nueva iteración la obtiene aplicando una función a las 2 iteraciones anteriores: $x_n = L(x_{n-1}, x_{n-2})$. Es un método rápido, pero no siempre converge.

4. MÉTODOS ITERATIVOS LINEALES.

Siempre convergentes

En los métodos iterativos hay que diferenciar 2 fases:

1º) Pasar de la ecuación $f(x) = 0$ a otra equivalente del tipo $x = g(x)$:

$f(x) \equiv x = g(x)$ EQUIVALENTES → Que tienen el mismo conjunto de soluciones.

2º) A partir de una hipótesis inicial para la raíz (x_0), se crea la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$ aplicando reiteradamente la función $g(x)$ a los puntos que vamos obteniendo:

x_0 ARBITRARIO $\quad x_0 \in [a,b]$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ \vdots \\ x_n = g(x_{n-1}) \end{array}\right. \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = s$$

Las únicas ecuaciones que cumplen estas condiciones son las llamadas **Ecuaciones de punto fijo**; es decir, las ecuaciones $g(x)$ que sean de punto fijo son las que admiten una solución a través de un método iterativo.

$f(x) \Rightarrow x = g(x)$

$y = x \Rightarrow y = g(x)$

$s \in [a,b] \qquad x_0 \in [a,b]$

x_0

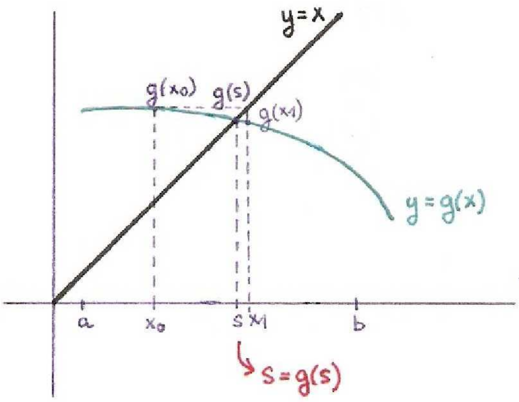
$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$



x_0 arbitrario. Trazo por $g(x_0)$ paralela horizontal. Donde corte a la recta, estará x_1. Así sucesivamente ...

$\boxed{s = g(s)}$ → El punto fijo es la solución. ⚠

Vamos a formalizar las ideas vistas ...

a) Condiciones iniciales:

$y = f(x)$ → Función de la que se quiere hallar (aproximadamente) la raíz.

$\boxed{x_n \simeq s}$ $s \in [a, b]$ → $[a, b]$ debe contener la raíz s de $f(x)$.

¿Qué tiene que cumplir el intervalo?

1.- Tª DE BOLZANO → $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [a, b]$

2.- UNICIDAD → $f'(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ Única $s \in [a, b]$

b) Aplicación:

① $f(x) \longrightarrow x_n = g(x_{n-1}) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = g_1(x) \\ x = g_2(x) \\ \vdots \\ x = g_m(x) \end{array}\right\}$

TIPOS DE OPERACIONES:

* Algebraicas $\ast \sqrt{}$
* Logarítmicas $\ast \sqrt[3]{}$
* Trigonométricas

DADA UNA ECUACIÓN HAY NUMEROSAS OPCIONES EN CUANTO A $g(x)$.

Este primer paso consiste en hallar una $g(x)$ adecuada.

② Ahora hay que elegir la aproximación de s inicial x_0:

$$x_0 \in [a, b] \quad \left\{\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_0 = b \\ x_0 = \dfrac{a+b}{2} \end{array}\right\}$$ Opciones que nos suelen venir mejor.

→ Punto medio del intervalo.

* EJEMPLO:

$$f(x) = x^3 - x + 1 \quad \begin{cases} x = g_1(x) = x^3 + 1 \\ x = g_2(x) = \sqrt[3]{x-1} \\ x = g_3(x) = (x-1)/x^2 \\ x = g_4(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x = g_m(x) \end{cases}$$

MUCHAS $g(x)$:
HAY MUCHAS FORMAS DE DESPEJAR "x" DE LA F(x)

$x^3 - x + 1 = 0 \longrightarrow$

- $x^3 + 1 = x$
- $x^3 = x - 1 \,;\quad x = \sqrt[3]{x-1}$
- $x.x^2 = x - 1 \,;\quad x = \dfrac{x-1}{x^2}$
- $x.x^2 = x - 1 \,;\quad x^2 = \dfrac{x-1}{x} \,;\quad x = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$

A partir de la función $f(x)$ que nos dan conseguimos un conjunto limitado de $g(x)$. ¿Qué $g(x)$ utilizo? Puede que alguna o todas o ninguna converjan (me lleven a la solución).

El Teorema del punto fijo nos indicará qué $g(x)$ son adecuadas y cuáles son las más rápidas.

> ¿Qué $g(x)$ son mejores?
> En el caso de $f(x)$ polinómica, despejar por el término de mayor grado para que me queden $\sqrt{\ }$.
> Si no es polinómica, buscar $\sqrt{\ }$ y logaritmos.

c) Condiciones de convergencia de $x = g(x)$:

$$[a, b] \begin{cases} \text{GLOBAL EN } [a, b] \\ \text{LOCAL } x_0 \simeq s \ (x_0 \text{ muy cercano a } s). \end{cases}$$

(11/1/2008)

5. TEOREMA DEL PUNTO FIJO.

¿Cómo pasamos de un método sin convergencia asegurada a uno que sí me la asegure?

$$y = f(x) \iff x = g(x) \qquad \begin{array}{|l} x_0 \in [a,b] \\ x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ \vdots \\ x_n = g(x_{n-1}) \\ s = g(s) \end{array}$$

(Transformar la función y obtener la sucesión).

¿Quién es $g(x)$? Hay varias posibilidades según cómo despejemos la "x":

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) = x \\ g_2(x) = x \\ \vdots \\ g_m(x) = x \end{array}\right\}$$

¿Cuáles son las condiciones para que una ecuación del tipo $x = g(x)$ converja?

$\Downarrow$

Me lo dice el T^{a} DEL PUNTO FIJO.

Pero antes de estudiar el teorema hay que repasar algunos conceptos previos:

I) Espacio métrico.
II) Espacio normado.
III) Sucesión Cauchy.
IV) Espacio métrico completo.
V) Aplicación contractiva.
VI) Punto fijo de una aplicación contractiva.
VII) Teorema del punto fijo.

$\Downarrow$

Condiciones convergencia $\begin{cases} \text{Global} \\ \text{Local} \end{cases}$

I ESPACIO MÉTRICO:

Un espacio métrico X es aquel espacio en el que se ha definido una distancia, una métrica. Dicho de otra forma, es un conjunto de elementos con una distancia definida entre ellos.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Propiedades:

$(x, y) \in X \longrightarrow$

a) $d(x,y) > 0$

b) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Solemos usar 3 distancias:

$$d_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - y_i$$

$$d_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

$$d_\infty = \text{máx } |x_i - y_i|$$

Si hablamos de funciones:

$g(x)$

$$d_1(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)|$$

$$d_2(g(x), g(y)) = \sqrt{|g(x) - g(y)|^2}$$

$$d_\infty(g(x), g(y)) = \text{máx } |g(x) - g(y)|$$

II) ESPACIO NORMADO:

Es aquel conjunto de elementos en el que está definida una norma:

$\| . \| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$

Propiedades:

a) $\| x \| > 0$

b) $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $\| \lambda x \| = \lambda . \| x \|$

d) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Solemos usar 3 normas:

$$\boxed{\begin{aligned} \| x \|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \| x \|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ \| x \|_\infty &= \text{máx } |x_i| \end{aligned}}$$

III) SUCESIÓN DE CAUCHY:

Conjunto de elementos ordenados $\{x_n\}$ tal que a partir de un determinado elemento x_m los elementos de la sucesión se pegan tanto como queramos.

$$\{x_n\} \quad ; \quad \exists m \; / \; d(x_n, x_m) < \xi \qquad \xi \geq 0 \quad \forall n, m > 0$$

IV) ESPACIO MÉTRICO COMPLETO:

Es aquel espacio métrico en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

V) APLICACIÓN CONTRACTIVA:

Es aquella que aplicada a dos elementos del espacio X los deja más cerca:

$$g : X \to X$$

Si $x, y \in X$, entonces:

$$d(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| \leq k . d(x,y) \leq k . |x-y| \quad \text{con } k < 1$$

Definida como d_1

Ejemplo de aplicación contractiva:

$$g(x) = \frac{3}{4}x - 1$$

$$d(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| = \left| \frac{3}{4}x - 1 - \left(\frac{3}{4}y - 1\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{3}{4}x - \cancel{1} - \frac{3}{4}y + \cancel{1} \right| = \underbrace{\frac{3}{4}}_{k} |x-y|$$

$$k = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{Aplicación contractiva.}$$

VI) PUNTO FIJO DE UNA APLICACIÓN CONTRACTIVA:

Se dice que s es un punto fijo de una aplicación contractiva si al aplicarle dicha función contractiva lo deja en el mismo sitio:

$$s = g(s)$$

Ejemplo: Dada la aplicación contractiva $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$.

¿Punto fijo? $\frac{2}{3}x - 2 = x$; $2x - 6 = 3x$; $x = -6$ → Es punto fijo de $f(x)$.

$x = f(x) \Leftrightarrow x$ punto fijo

VII TEOREMA DEL PUNTO FIJO:

Si $g(x)$ es una función contractiva en un espacio métrico completo, entonces existe un único punto fijo s. Además, dicho punto fijo es el límite de la sucesión definida por $x_n = g(x_{n-1})$ con x_0 arbitrario:

Punto fijo s: $s = g(s)$ / $s = \lim_{n\to\infty} \{x_n\}$ → Empezando en x_0 arbitrario:

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_n = g(x_{n-1})$$

[Razonamiento del Tª: Pág 5 - Apuntes A. Tabernero]

• TIPOS DE CONDICIONES DE CONVERGENCIA:

El Teorema del Punto Fijo nos habla de 2 tipos de convergencia:

GLOBAL → Cuando $x_0 \in [a, b]$
Las condiciones serán muy duras.

LOCAL → Cuando $x_0 \simeq s$ (x_0 muy cercano a s).
Las condiciones serán más suaves, pues x_0 ya está bastante cerca de la raíz s.

Vamos a ver cada una de ellas.

6. CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS.

a) GLOBAL: $x_0 \in [a,b]$

función contínua en $[a,b]$

a.1) $g(x) \in C[a,b]$, $g([a,b]) \subset [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ al menos un punto fijo $s \in [a,b]$

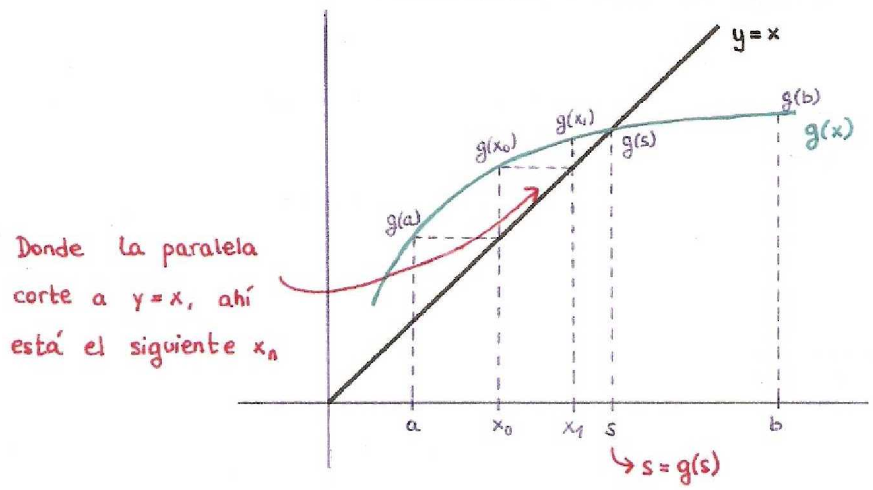
(*) →

a.2) Si $\exists$ una cte $L < 1$ / $d(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| \leq L|x-y| \Rightarrow$

$\Rightarrow s$ es único $\Rightarrow$ $\boxed{\text{UNICIDAD DEL PUNTO FIJO } s \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} \{x_n\}}$

Esto no es más que el Teorema del Punto Fijo aplicado a nuestro caso: el espacio métrico completo es el intervalo $[a,b]$ con la distancia $d(x,y) = |x-y|$. La condición ① me garantiza que $g(x)$ es una aplicación $g: X \to X$ y la condición ② implica que $g(x)$ es contractiva. Por tanto, como se dan las condiciones del Teorema del Punto Fijo, podemos sacar las conclusiones que de él se derivan.

El significado de la condición ① lo podemos ver gráficamente:



$x_0 \in [a,b]$ arbitrario

$x_1 = g(x_0)$

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$

$s = g(s)$

$\Downarrow$

¿Qué condiciones tiene que cumplir $g(x)$?

Esto me dice que $\exists s$. También deberá cumplir a.2) ←

a.1) $g(a) \geq a$, $g(b) \leq b$	Si g creciente.	$g(a) \leq b$, $g(b) \geq a$	Si g decreciente.

EJEMPLO :

$$g(x) = x^3 - x - 1$$

$$d\left(g(x), g(y)\right) = \left|g(x) - g(y)\right| = \left|x^3 - x - \cancel{1} - (y^3 - y - \cancel{1})\right| =$$

$$= \left|x^3 - x - y^3 + y\right| \leqslant L\,|x - y|$$

Hallar L en este caso es fácil, pero normalmente será complicado. Por eso tengo que buscar algo parecido a L y que pueda hallarlo de manera más cómoda.

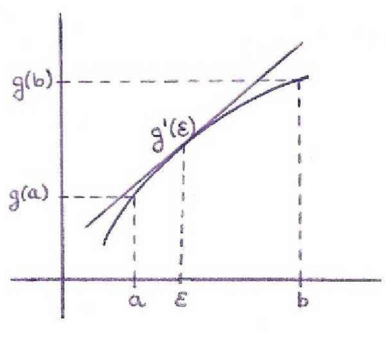
→ ⊛

> Se dice que una función $g(x)$ es Lipschitziana con constante L si: $|g(x) - g(y)| \leqslant L|x-y| \ \forall x, y$

TEOREMA DEL PUNTO MEDIO:

Si tengo una función $g(x)$ derivable en $[a,b]$, entonces existe un punto $\mathcal{E}$ tal que $a \leqslant \mathcal{E} \leqslant b$ que cumple:

$$\boxed{g(a) - g(b) = g'(\mathcal{E}).(b-a)}$$



Tomamos módulos: $\left|g(a) - g(b)\right| = \left|g'(\mathcal{E}).(b-a)\right|$

De forma general: $\left|g(a) - g(b)\right| = \underbrace{\left|g'(x)\right|}_{L}.(b-a)$

L → La acotamos por $L<1$ para que se cumpla la condición a.2)

Si todo $L = \left|g'(x)\right|_{[a,b]} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)$ es convergente en $[a,b]$

Por tanto, las condiciones a.1 y a.2 quedan de la siguiente manera:

Si tomo $g(x) \in C^1[a,b]$ y $g'(x) > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\text{o}})\ \left.\begin{array}{l} g(a) \geq a \\ g(b) \leq b \end{array}\right\} g(x) \in [a,b] \\ \\ 2^{\text{o}})\ |g'(x)|_{[a,b]} < 1 \end{array}\right\} g(x) \text{ MONÓTONA CRECIENTE}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\text{o}})\ g(a) \leq b \\ \quad\ \ g(b) \geq a \\ \\ 2^{\text{o}})\ |g'(x)|_{[a,b]} < 1 \end{array}\right\} g(x) \text{ MONÓTONA DECRECIENTE}$$

ÉSTAS SON LAS CONDICIONES PRÁCTICAS QUE HAY QUE COMPROBAR EN LOS PROBLEMAS. SI SE CUMPLEN, g(x) CONVERGE GLOBALMENTE.

(15/1/2008)

A continuación veremos condiciones menos restrictivas que garantizan convergencia local, es decir, siempre que empecemos suficientemente cerca de la raíz. Estas nuevas condiciones son muy útiles porque siempre nos podremos acercar suficientemente a la raíz con métodos de tipo bisección.

b) LOCAL: $x_0 \simeq s$

Intervalo alrededor de la raíz s.

$$\left.\begin{array}{l} \text{b.1) Si } \exists s \text{ tal que } s = g(s) \text{ y } g(x) \in C^1[a,b] \\ \\ \text{b.2) } |g'(s)| < 1 \end{array}\right\}$$

En la práctica, como no conozco s ni puedo hallarla exactamente, la condición de convergencia me queda: $\longrightarrow$

$$\begin{array}{l} x_0 \simeq s \\ x_1 = g(x_1) \\ x_2 = g(x_1) \\ \vdots \\ s \simeq x_n = g(x_{n-1}) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} |g'(x_0)| < 1 \\ \vdots \\ \boxed{|g'(x_n)| < 1} \end{array}$$

CONDICIÓN PRÁCTICA PARA QUE g(x) CONVERJA LOCALMENTE.

* **PROBLEMA**: Obtener una raíz positiva con 3 decimales exactos de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1$ por medio de un método iterativo lineal, estudiando previamente la convergencia.

1.- Condiciones Iniciales:

¿Qué nos da el enunciado?

Tenemos $f(x) = x^3 - x - 1$

No nos dan el intervalo $\rightarrow \nexists [a,b] \ / \ s \in [a,b]$

No nos dan x_0 cercano a $s \rightarrow \nexists x_0 \simeq s$

POR TANTO, ES UN CASO DE CONVERGENCIA GLOBAL.

Lo primero es hallar un intervalo aislante de la raíz:

Dando valores a la función $f(x) = x^3 - x - 1$ se obtiene la tabla:

x	f(x)
0	-1
1	-1
2	5

El intervalo $[a,b]$ será el $[1,2]$, pues en ese intervalo de valores de x, $f(x)$ cambia de signo.

Comprobamos las condiciones que debe cumplir el intervalo:

1.- Tª DE BOLZANO $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow s \in [a,b]$

¿$s \in [1,2]$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 5 \end{array}\right\} f(1) \cdot f(2) = -5 < 0 \Rightarrow \exists s \ / \ s \in [1,2]$$

2.- UNICIDAD $\rightarrow$ $\exists f'(x)_{[a,b]} \gtrless 0 \Rightarrow$ Única $s \in [a,b]$

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \quad \forall x \in [1,2] \Rightarrow$ Única $s \in [1,2]$

Ya tenemos la $f(x)$ y el intervalo que contiene a la raíz s. Como se cumplen las condiciones, podemos empezar a aplicar el método.

2.- Aplicación del método:

Primero, hacemos la transformación: $f(x) = 0 \iff x = g(x)$

$x^3 - x - 1 = 0 \rightarrow$

- $x^3 - 1 = x \rightarrow g_1(x) = x^3 - 1$
- $x^3 = x + 1 \rightarrow g_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$
- $xx^2 = x + 1 \rightarrow g_3(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$
- $xx^2 = x + 1 \rightarrow g_4(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

¿Qué $g(x)$ cojo? ¿Cuál o cuáles serán convergentes (me llevarán a la solución?

Lo mejor es coger una $g(x)$ que tenga una RAÍZ con el MAYOR RADICANDO posible, ya que tendrá una derivada más pequeña. LAS DERIVADAS MÁS CERCANAS A 0 CONVERGEN MEJOR Y MÁS RÁPIDAMENTE.

Si la función es polinómica, cojo la $g(x)$ resultante de despejar por el término de mayor grado.

Mi $f(x)$ es polinómica. Cojo $\boxed{g_2(x) = \sqrt[3]{x+1}}$

3.- Analizar la convergencia global de g(x) en [1,2]:

$g(x)$ es monótona creciente en $[1,2]$, así que las condiciones de convergencia son:

a) $g(a) \geq a \rightarrow g(1) \geq 1 \rightarrow \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2} \approx 1'26 > 1$
$g(b) \leq b \rightarrow g(2) \leq 2 \rightarrow \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3} \approx 1'44 < 2$
} Se cumple la 1ª condición.

b) $\underbrace{g'(x) \text{ en } [1,2] < 1}_{|g'(x)|_{[a,b]} < 1}$

$$g(x) = \sqrt[3]{x+1} \qquad g'(x) \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$g'(a) = g'(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1)^2}} < 1$$

$$g'(b) = g'(2) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2+1)^2}} < 1$$

} Se cumple la 2ª condición

Por lo tanto, existe convergencia: $g_2(x)$ nos llevará a la solución. Puedo empezar a iterar.

4.- Elección de $x_0 \in [1,2]$:

Podemos coger cualquier valor que pertenezca al intervalo [1,2], pero tomo el punto medio.

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1'5$$

COGER EL PUNTO MEDIO ES LO MEJOR.

5.- Iteraciones:

$x_1 = g(x_0) = g(1'5) = \sqrt[3]{1'5+1} = 1'353$
$x_2 = g(x_1) = g(1'353) = \sqrt[3]{1'353+1} = 1'33$
⋮

⋮
$x_5 = g(x_4) = 1'3247$
$x_6 = g(x_5) = 1'3247$
} 1'325 = aprox. de la raíz de $f(x)$

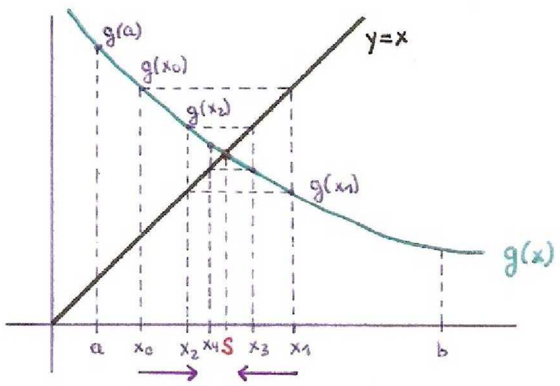
7. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CONVERGENCIA.

Una de las condiciones que teníamos para comprobar la convergencia global de $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$ era:

$$\boxed{|g'(x)|_{[a,b]} < 1} \Rightarrow \text{¿QUÉ SIGNIFICA?}$$

$$-1 < g'(x) < 1 \longrightarrow \begin{cases} -1 < g'(x) & \text{(a)} \\ g'(x) < 1 & \text{(b)} \end{cases}$$

(a) $-1 < g'(x) < 0 \rightarrow$ Derivada $< 0 \Rightarrow g(x)$ decrece.



Nos vamos acercando por los dos lados

Empezamos en x_0 arbitrario.

$x_1 = g(x_0)$

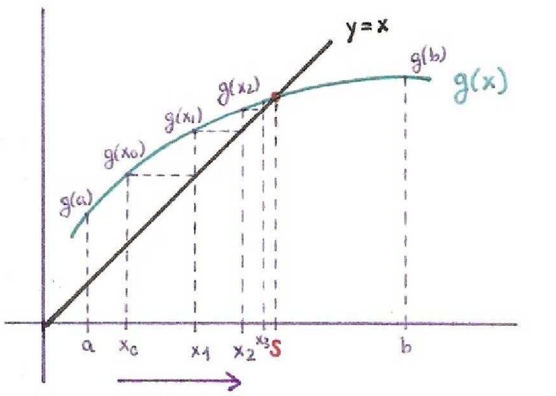
$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

→ CONVERGENCIA ALTERNANTE.

ALTERNANTE ES MEJOR QUE MONÓTONA.

(b) $0 < g'(x) < 1 \rightarrow$ Derivada $> 0 \Rightarrow g(x)$ crece.



Nos vamos acercando por un lado.

Empezamos en x_0 arbitrario.

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

→ CONVERGENCIA MONÓTONA.

CUANTO MÁS CERCANA A 0 SEA $g'(x)$ MEJOR CONVERGERÁ.

8. COTA DE ERROR EN MÉTODOS ITERATIVOS LINEALES.

Un aspecto fundamental de todo método iterativo es saber cuándo parar. Para ello tenemos que definir una cota para el error cometido en cada iteración.

Al principio el error entre dos iteraciones x_n y x_{n+1} es muy errático, pero cuando estamos en "n" altos tiende a ser constante.

Definimos la cota de error como:

$$|e_n| = |x_n - s|$$

Pero esta fórmula tiene 2 problemas:

* Para hallar x_n tengo que calcular todo el proceso:

x_0 arbitrario
$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$
$\vdots$
$x_n = g(x_{n-1})$ $s \simeq x_n$

→ Hacer todo esto me puede llevar mucho tiempo.

* El problema más importante: No puedo aplicar la fórmula porque está en función de s, que es desconocida.

Por tanto, tengo que pasar de esta fórmula a otra que sí pueda utilizar. ¿Qué me viene bien?

2 opciones buenas $\begin{cases} |e_n| \text{ en función de } a \text{ y } b \text{ (extremos del intervalo).} \\ |e_n| \text{ en función de } x_0. \end{cases}$

Vamos a hallar otra fórmula alternativa.

* FÓRMULA DE LA COTA DE ERROR:

$|e_n| = |x_n - s|$

x_0 arbitrario

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$

$s = g(s)$

Recordamos definición de APLICACIÓN CONTRACTIVA: Es aquella que aplicada a 2 puntos los deja más cerca:

$$d(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| \leq L|x-y|$$

$\hookrightarrow L \leq 1$

$$|e_n| = |x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| \leq L|x_{n-1} - s| \leq L|g(x_{n-2}) - g(s)| \leq L^2|x_{n-2} - s| \leq \ldots$$

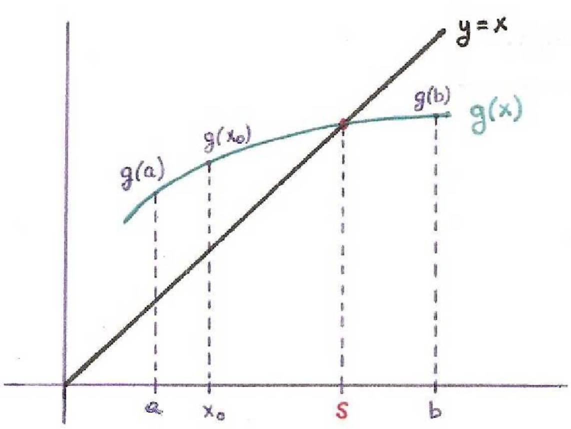
$\leq \ldots \leq$ Sigo iterando hasta obtener:

$$|e_n| \leq L^n |x_0 - s|$$

Esta fórmula ya está mejor que la anterior porque depende de x_0 en lugar de x_n, pero seguimos con el problema de la dependencia de s. Podemos solucionarlo de 2 formas:

1ª) Hallar fórmula que dependa de los extremos del intervalo: a y b.
2ª) " " " " sólo de x_0.

1ª) Dependiente de a y b:



$|e_n| \leq L^n |x_0 - s|$

$\downarrow$

$$\boxed{|e_n| \leq L^n |b-a|}$$

↳ La cota es siempre constante para todos los subintervalos, despreciando que cada vez son más finos. Podríamos tener cotas más ajustadas.

2ª) Dependiente sólo de x_0:

Partiendo de la sucesión $\{x_n\}$ que tenemos, construiremos la sucesión $\{u_k\}$ de la siguiente manera:

$$\{x_n\} \longrightarrow \{u_k\}$$

$$\begin{array}{ll}
x_0 & u_0 = x_0 \\
x_1 = g(x_0) & u_1 = x_1 - x_0 \\
x_2 = g(x_1) & u_2 = x_2 - x_1 \\
\vdots & \vdots \\
x_n = g(x_{n-1}) & u_k = x_k - x_{k-1} \\
s = g(s) &
\end{array}$$

$$x_n = \sum_0^n u_k = \cancel{x_0} + \cancel{x_1} - \cancel{x_0} + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{\ldots} + x_n - \cancel{x_{n-1}} = x_n$$

donde:

$$s = \lim_{n \to \infty} x_n = \sum_0^\infty u_k$$

Entonces: $$|e_n| = |x_n - s| = \left| \sum_0^n u_k - \sum_0^\infty u_k \right| = \left| \sum_{n+1}^\infty u_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n+1}^\infty |u_k| \leq \sum_{n+1}^\infty |x_k - x_{k-1}|$$

$$\boxed{|e_n| \leq \sum_{n+1}^\infty |x_k - x_{k-1}|}$$

Esta fórmula no depende de x_n ni de s, pero me interesa que dependa de iteraciones bajas (x_0 y x_1)

Tengo que:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 \\ &x_1 = g(x_0) \\ &x_2 = g(x_1) \\ &\vdots \\ &x_{k-1} = g(x_{k-2}) \\ &x_k = g(x_{k-1}) \end{aligned}\right\} \text{ Lo aplico en la fórmula obtenida.}$$

Por el Tª del Punto Medio

$$|e_n| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} L\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n+1}^{\infty} L\,|g(x_{k-2}) - g(x_{k-3})| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} L^2\,|x_{k-2} - x_{k-3}| \leqslant \dots \leqslant$$

$$\leqslant \dots \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} L^{k-1} \cdot |x_1 - x_0| \;;$$

$$|e_n| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} L^{k-1} \cdot |x_1 - x_0| \leqslant \sum_{n}^{\infty} L^{k} \cdot |x_1 - x_0| \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - x_0| \cdot \sum_{n}^{\infty} L^k$$

$$\sum_{n}^{\infty} L^k = \frac{L^n}{1-L}$$

Suma de potencias

$$|e_n| \leqslant \frac{L^n\,|x_1 - x_0|}{1-L} \longrightarrow \text{¿}L\text{?}$$

Por el Teorema del Punto Medio tenemos que:

$$L = |g'(x)|_{[a,b]}$$

$\downarrow$

Cogeré su valor máximo para mantener correctamente la acotación.

Esto no es sólo una demostración, también viene en la hoja de ejercicios.

$$\boxed{|e_n| = |x_n - s| \leqslant \frac{L^n \cdot |x_1 - x_0|}{1-L} \quad \text{con } L = \text{máx } |g'(x)|_{[a,b]}}$$

FÓRMULA DE LA COTA DE ERROR PARA MÉTODOS ITERATIVOS LINEALES.

[Leer pág 10 - Apuntes A. Tabernero].

Esta expresión del error me sirve para 2 tipos de problemas:

1^er^ TIPO → Ver qué error estoy cometiendo cuando obtengo la aproximación x_n.

2º TIPO → Calcular la x_n aproximación de s ($x_n \simeq s$) tal que, o al ir iterando ya no obtendré más beneficio, o en el enunciado me pedían cierto error que ya alcancé.

8.1. PROBLEMA TIPO 1.

Dada la función $f(x) = 2^{-x} - x$.

→ Obtenida a partir de $f(x)$: $2^{-x} - x = 0$; $x = 2^{-x} = g(x)$

a) Probar que $g(x) = 2^{-x}$ tiene un punto fijo en $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

b) Utilizar la iteración del punto fijo para encontrar una aproximación con 4 decimales exactos → $\varepsilon \leq 10^{-4}$ → $|e_n| \leq 10^{-4}$

c) Hallar la cota de error cometido en la aproximación x_n.

ⓐ Tenemos la función y el intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2^{-x} - x \\ [a, b] = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{array}\right\}$$

El punto fijo de $g(x)$ es la raíz de $f(x)$: $s = g(s)$ ← ⚠

Vamos a probar que $\exists$ una raíz s en dicho intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{- T}^a \text{ DE BOLZANO} \rightarrow f(1/3) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow s \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \\ 2.\text{- UNICIDAD} \rightarrow f'(x)\Big|_{[1/3,1]} = (-1) \cdot 2^{-x} \cdot \log 2 - 1\Big|_{[1/3,1]} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sí $\exists$ única $s \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

(b) Antes de empezar a iterar tenemos que comprobar que $g(x)$ sea convergente, es decir, que $g(x)$ me vaya a conducir a la solución.

$x = g(x) \rightarrow g(x) = 2^{-x}$ ¿Converge?

Condiciones para la <u>convergencia global</u>: (MONÓTONA DECRECIENTE)

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\underline{o}})\ g(a) \leqslant b \rightarrow g\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant 1 \rightarrow 2^{-1/3} \leqslant 1 \rightarrow 0'79 \leqslant 1 \\ \quad g(b) \geqslant a \rightarrow g(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3} \\ 2^{\underline{o}})\ |g'(x)|_{[a,b]} < 1 \rightarrow |g'(x)|_{[1/3,1]} = |(-1).2^{-x}\log 2|_{[1/3,1]} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sí $\exists$ convergencia global de $x = 2^{-x}$ en $[1/3, 1]$ porque las condiciones se cumplen.

Ahora podemos empezar a iterar:

$x_0 \in [1/3, 1]$

$x_0 = 1 \rightarrow$ No cojo el punto medio del intervalo porque en este caso es más cómodo el 1.

$x_1 = g(x_0) = g(1) = 2^{-1} = 0'5$

$x_2 = g(x_1) = g(0'5) = 2^{-0'5} = 0'707$

$\vdots$

$x_{11} = g(x_{10}) = 0'6411$

$$\left.\begin{array}{l} x_{12} = g(x_{11}) = 0'\underline{6412} \\ x_{13} = g(x_{12}) = 0'\underline{6412} \end{array}\right\} \text{Aproximación} \rightarrow \boxed{x_{13} = 0'6412}$$

(c) Calcular $|e_{13}|$

$$|e_{13}| \leqslant \frac{L^{13} \cdot |x_1 - x_0|}{1 - L} \quad ; \quad x_0 = 1 \ ; \ x_1 = 0'5 \ ; \ L = \text{máx}\, |g'(x)|_{[1/3,1]}$$

$$L = \text{máx}\, |(-1)\, 2^{-x} \ln 2|_{[1/3,1]} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \rightarrow L = |-0'55| = \underline{0'55} \\ x = 1 \rightarrow L = |-0'346| = 0'346 \end{array}\right.$$

$$\boxed{|e_{13}| \leq 4'68 \cdot 10^{-4}}$$

(18/1/2008)

8.2. PROBLEMA TIPO 2.

Calcular la abscisa positiva del punto de intersección de las curvas:

$$y = e^x - 2$$
$$y = \ln(x+2)$$

por medio del método iterativo $x_n = g(x_{n-1})$

a) Demostrar que el algoritmo es convergente.

b) Calcular la abscisa citada con 4 decimales exactos $\rightarrow |e_n| \leq 10^{-4}$

(a) ¿Cuál será mi $f(x)$?

$f(x) \Rightarrow e^x - 2 = \ln(x+2)$;

$e^x = \ln(x+2) + 2$;

$x = \ln(\ln(x+2)+2)$

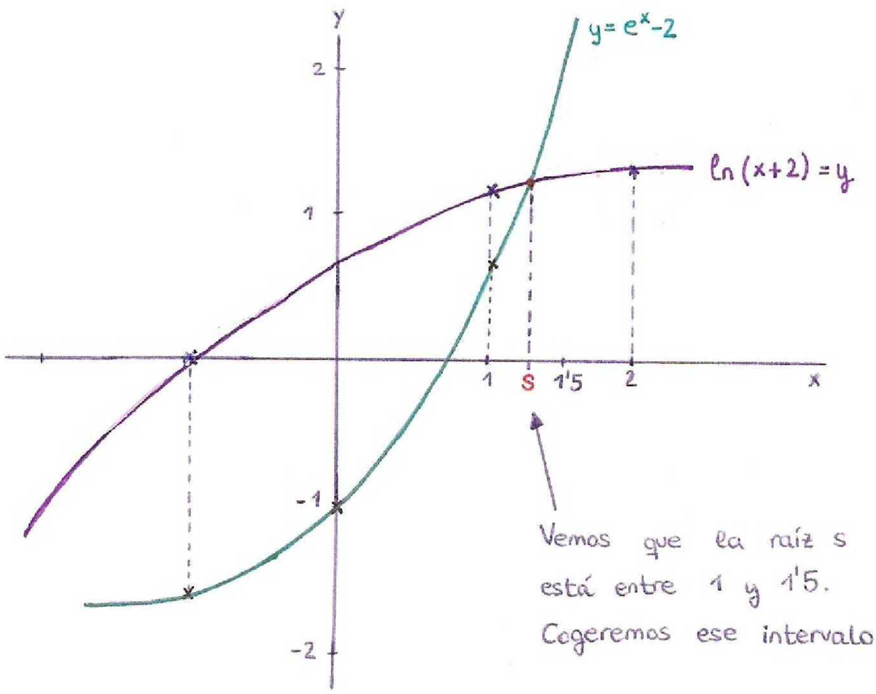
$x - \ln(\ln(x+2)+2) = 0 \rightarrow \boxed{f(x) = x - \ln(\ln(x+2)+2)}$

Punto de intersección

⇓

Igualo las 2 curvas

Dibujamos aproximadamente las curvas:



Vemos que la raíz S está entre 1 y 1'5. Cogeremos ese intervalo.

x	y
-1	-1'67
0	-1
1	0'718
2	5'39

$y = e^x - 2$

x	y
-1	0
0	0'69
1	1'1
2	1'38

$y = \ln(x+2)$

Tengo la función $\rightarrow$ $f(x) = x - \ln(\ln(x+2)+2) = 0$

Tengo el intervalo $\rightarrow$ $[a,b] = [1, 1'5]$

Hallamos $g(x)$ $\rightarrow$ $x_n = g(x_{n-1})$; $x = \ln(\ln(x+2)+2)$; $\rightarrow$ g(x) se obtiene despejando "x" en la función f(x).

$$\boxed{g(x) = \ln(2+\ln(x+2))}$$

Ahora comprobamos la convergencia global de $g(x)$: (MONÓTONA CRECIENTE)

1º) $\left.\begin{array}{l} g(a) \geq a \\ g(b) \leq b \end{array}\right\}$

$[1, 1'5]$

$\left.\begin{array}{l} g(1) = \ln(2+\ln 3) \simeq 1'13 \geq 1 \\ g(1'5) = \ln(2+\ln 3'5) \simeq 1'18 \leq 1'5 \end{array}\right\}$ Se cumple que $g(x) \in [1, 1'5]$

2º) $|g'(x)|_{[a,b]} < 1$

$$\left| g'(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{2+\ln(x+2)} \right|_{[1,1'5]} < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(1) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2+\ln 3} \simeq 0'11 < 1 \\ g'(1'5) = \dfrac{1}{3'5} \cdot \dfrac{1}{2+\ln 3'5} \simeq 0'09 < 1 \end{array}\right\}$$

$g'(1'5) < g'(x) < g'(1)$
$\forall x \in [1, 1'5]$

Se cumplen las condiciones. Por tanto, g(x) es convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = s$$

(b) Hay que calcular x_n tal que :

$$|x_n - s| = \frac{L^n |x_1 - x_0|}{1-L} \leq 10^{-4}$$

(Fórmula de la cota de error para métodos iterativos lineales).

$$L = máx \, |g'(x)|_{[1,1'5]} = 0'11$$ ← (Calculado anteriormente).

Tomamos x_0 arbitrario:

$x_0 \in [1, 1'5] \rightarrow x_0 = 1$ (Más cómodo que coger el punto medio).

$x_1 = g(x_0) = g(1) = 1'13$

$$|x_n - s| = \frac{L^n |x_1 - x_0|}{1-L} = \frac{0'11^n \, |1'13 - 1|}{1 - 0'11} \leq 10^{-4} \; ; \quad 0'11^n \leq \frac{0'89 \cdot 10^{-4}}{0'13} \; ;$$

$$\ln(0'11^n) \leq \ln\left(\frac{0'89 \cdot 10^{-4}}{0'13}\right) \; ; \quad n \cdot \ln(0'11) \leq \ln\left(\frac{0'89 \cdot 10^{-4}}{0'13}\right) \; ;$$

< 0

Despejo $n \rightarrow n \geq 3'30 \Rightarrow n = 4$

Es < 0: Cambiará el sentido de la desigualdad.

Tomo el x_n tal que n es el valor entero positivo superior más cercano.

Calculamos las iteraciones correspondientes :

$x_0 = 1$

$x_1 = g(x_0) = 1'13$

$x_2 = g(x_1) = 1'14455$

$x_3 = g(x_2) = 1'14602$

$x_4 = g(x_3) = 1'14617$ ← $x_4 \simeq s \in [1, 1'5]$

$x_5 = g(x_4) = 1'14619$

→ No hace falta calcularla. Sólo es para comprobar que tiene 4 decimales exactos x_4.

9. ORDEN DE CONVERGENCIA.

El concepto de orden de convergencia surge al plantearse la comparación entre los errores en pasos (iteraciones) sucesivos. En un principio los errores pueden ser erráticos, pero progresivamente adoptan un comportamiento regular.

* CONVERGENCIA LINEAL.

Se dice que un método tiene convergencia lineal cuando para n altas el error se reduce en cada paso por una constante:

$$\frac{e_{n+1} = |x_{n+1} - s|}{e_n = |x_n - s|} = cte \neq 0$$

Vamos a ver qué condiciones debe cumplir un método para tener convergencia lineal.

(Cae en exámenes este proceso).

Tenemos el método →

$$\left| \begin{array}{l} x_0 \\ x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ \vdots \\ x_n = g(x_{n-1}) \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{array} \right.$$

Desarrollamos por Taylor $g(x_n)$ en la raíz s:

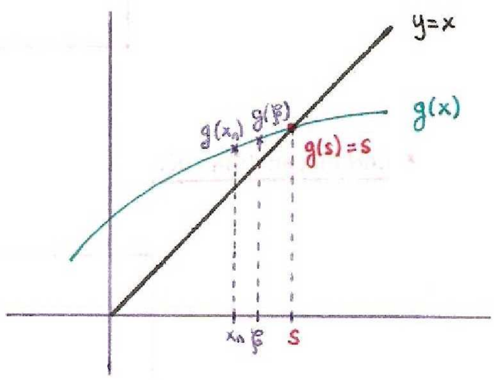
$$g(x_n) = g(s) + g'(\xi).(x_n - s) \qquad \text{con } \xi \in [x_n, s]$$

$$g(x_n) - g(s) = g'(\xi).(x_n - s);$$

$$x_{n+1} - s = g'(\xi).(x_n - s);$$

$$\underbrace{|x_{n+1} - s|}_{e_{n+1}} = |g'(\xi)|.\underbrace{|x_n - s|}_{e_n};$$

$$|e_{n+1}| = |g'(\xi)|.|e_n|$$



$|e_{n+1}| = |g'(\xi)| . |e_n|$;

$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(\xi)|$ → No tiene por que ser constante, pues ξ cambia en cada paso.

Sin embargo, para n altas $(n \to \infty)$, x_n y $\xi \to s$:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(s)| = cte \neq 0}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{ll} s = g(s) & g'(s) \neq 0 \\ \lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(s)| \neq 0 & \end{array}}$$

CONDICIONES PARA LA CONVERGENCIA LINEAL DE UN MÉTODO.

* CONVERGENCIA CUADRÁTICA.

[Razonamiento: Pág 10 - Apuntes A. Tabernero]

$$\boxed{\begin{array}{ll} s = g(s) & g'(s) = 0 \\ & g''(s) \neq 0 \\ \lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{g''(s)}{2!} \neq 0 & \end{array}}$$

CONDICIONES PARA LA CONVERGENDIA CUADRÁTICA DE UN MÉTODO.

* CONVERGENCIA K.

$$\boxed{\begin{array}{ll} s = g(s) & g'(s) = g''(s) = \dots = g^{(k)}(s) = 0 \\ & g^{(k)}(s) \neq 0 \\ \lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^k} = \frac{g^{(k)}(s)}{k!} \neq 0 & \end{array}}$$

CONDICIONES PARA LA CONVERGENCIA GENÉRICA K DE UN MÉTODO.

* PROBLEMA:

Problema de examen!

Sea $f(x)$ una función contínua con derivada contínua en $[a,b]$ y tal que:

$$\underbrace{f(a)\cdot f(b) < 0}_{\text{Bolzano}} \quad y \quad \underbrace{f'(x)\Big|_{[a,b]} < 0}_{\text{Unicidad}}$$

$\Rightarrow$ Es decir, se cumplen las condiciones para que exista única raíz en $[a,b]$.

Se considera el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = x - \lambda f(x)$.

a.1) Determinar condiciones sobre $\lambda \in \mathbb{R}$ que garanticen que dicho método converge a la raíz de f en $[a,b]$ si el punto inicial x_0 está suficientemente próximo a s. **(Estamos en CONVERGENCIA LOCAL).**

a.2) Encontrar el valor de λ para que la convergencia sea cuadrática.

b) Dar interpretación geométrica del método iterativo del apartado 1 cuando la convergencia es cuadrática.

c) Sea $f(x) = x - e^{-x}$. Estúdiese la convergencia del método dado para $\lambda = \frac{1}{2}$ si $x_0 \in [0,1]$. } NO

a.1 ¿λ? si $x_0 \simeq s$ $\Rightarrow$ Convergencia local.

Lo único de lo que dispongo para hallar λ es la condición de convergencia local:

$$\boxed{|g'(s)| < 1}$$

$g(x) = x - \lambda f(x)$

$g'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ ← Debe cumplir la condición.

$\downarrow$

$|1 - \lambda f'(s)| < 1$

$$|1-\lambda f'(s)| < 1 \; ;$$

$$-1 < 1-\lambda f(s) < 1 \rightarrow \begin{cases} -1 < 1-\lambda f'(s) & \boxed{1} \\ 1-\lambda f'(s) < 1 & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $\lambda f'(s) < 2 \; ; \; \lambda < \dfrac{2}{f'(s)}$

$\boxed{2}$ $-\lambda f'(s) < 0 \; ; \; \lambda f'(s) > 0 \; ; \; \lambda > 0$

$$\boxed{0 < \lambda < \frac{2}{f'(s)}}$$ ← Para que el método sea convergente.

(a.2) Condiciones para convergencia cuadrática:

$$s = g(s)$$
$$g'(s) = 0$$
$$g''(s) \neq 0$$

$$g'(s) = 1-\lambda f'(s) = 0 \; ;$$

$$1 = \lambda f'(s) \; ; \; \lambda = \frac{1}{f'(s)} \; ;$$

$$g(x) = x - \lambda f(x) \Longrightarrow \boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$ → Tiene convergencia cuadrática.

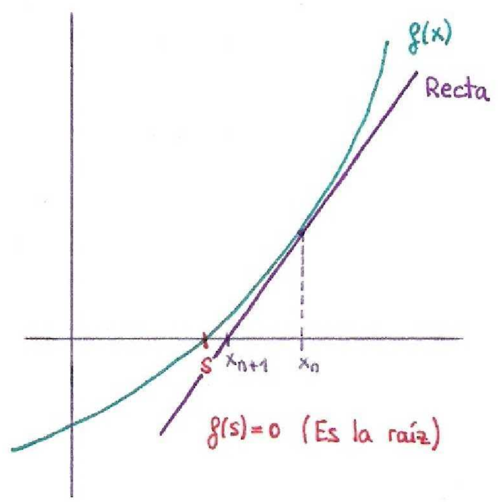
(b) El método que me da la convergencia cuadrática es: $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[\text{PUNTO FIJO}]{\text{APLICO TEOREMA}} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_0
$x_1 = g(x_0)$
$\vdots$
$x_{n+1} = g(x_n)$

$$(x_{n+1} - x_n) \cdot f'(x_n) = -f(x_n)$$

Hemos conseguido este método que tiene expresión de recta. Pasa por los puntos $[x_n, f(x_n)]$ y $[x_{n+1}, 0]$. Es un método iterativo que es tangente a $f(x)$ en x_n y donde la recta corta al eje x, está x_{n+1}.



Resulta que esto es el Método de Newton-Raphson. Fijando convergencia cuadrática pasamos de un método iterativo al de Newton-Raphson.

(22/1/2008)

10. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.

- MÉTODO.
- CONDICIONES DE CONVERGENCIA.
- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.
- COTA DE ERROR.
- ORDEN DE CONVERGENCIA.
- PROBLEMAS CON N-R.

[Pág. 14 - Apuntes A. Tabernero]

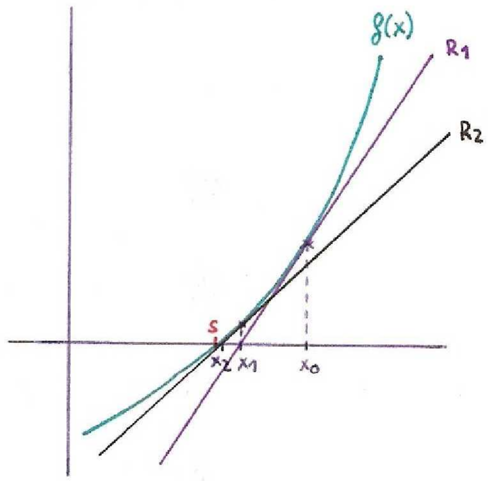
* MÉTODO:

Como siempre, estamos intentando pasar de una $f(x) = 0$ a $x = g(x)$ equivalente.

¿Qué $g(x)$ tomo? Tiene que cumplir las condiciones necesarias para que el método iterativo $x = g(x)$ tenga convergencia cuadrática.

$$x = g(x)$$
$$s = g(s)$$
$$g'(s) = 0$$
$$g''(s) \neq 0$$

Empezamos a iterar en un x_0 cercano a s ($x_0 \simeq s$) pues es necesaria convergencia local. Se traza la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0 y donde corte al eje X estará x_1. Así sucesivamente...



Esta recta pasa por los puntos:

$$\begin{matrix} [x_0,\ f(x_0)] \\ [x_1,\ 0] \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} [x_n,\ f(x_n)] \\ [x_{n+1},\ 0] \end{matrix}$$

ECUACIÓN DE UNA RECTA:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

→

Sustituyendo en la ecuación de la recta los 2 puntos por los que pasa, obtenemos:

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \;;\quad f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \;;$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \;;$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Generalizando...

FÓRMULA GENERAL DE NEWTON - RAPHSON →

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

* CONDICIONES DE CONVERGENCIA:

$f(x) \in C^2 \rightarrow f(x)$ es de clase $2 \equiv$ Tiene 2 derivadas contínuas.

$x_0 \simeq s \in [a,b]$

Las condiciones de convergencia son las siguientes:

1º) $f(x) \in C^2 \Rightarrow$ De clase $2 \equiv$ Contínua de orden 2.

2º) Bolzano $\Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \equiv$ Tiene que $\exists$ la raíz s en $[a,b]$.

3º) $f'(x)_{[a,b]} \neq 0 \equiv \exists$ única s en $[a,b]$

4º) $f''(x)_{[a,b]} \gtrless 0$

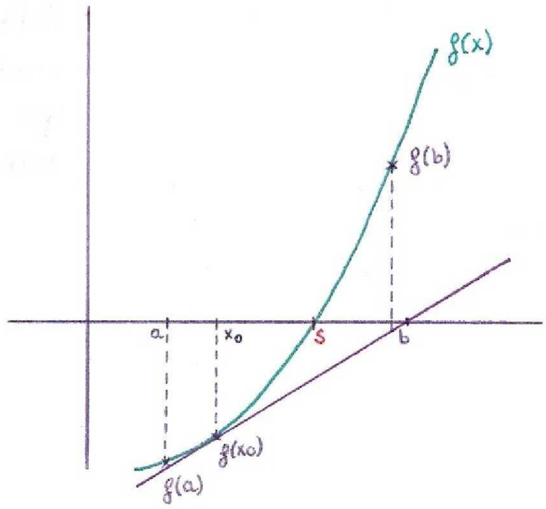
Si se cumplen estas 4 condiciones y empiezo a iterar en un $x_0 \simeq s$ que cumple que: $\underline{f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$ entonces $\exists$ convergencia N-R.

↳ Si comparten signo.

Y tenemos otra condición:

5º) Si $f(x) \in C^3$ la convergencia es, al menos, cuadrática.

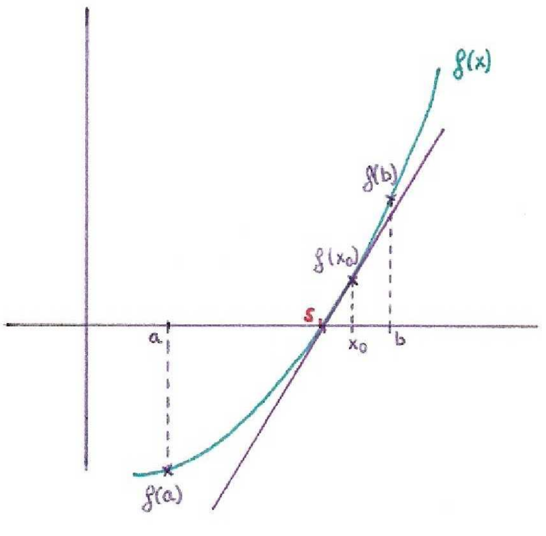
¿Por qué es convergente el método si $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$? Vamos a razonarlo gráficamente:



Vemos que $f(x)$ es cóncava $\cup$ así que $f''(x) > 0$

a) $\left.\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f(x_0) < 0 \end{array}\right\} f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$

Al trazar la tangente a $f(x)$ en x_0, me salgo del intervalo. No me acerco a s.



b) $\left.\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{array}\right\} f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

De esta manera, la sucesión que se forma sí me acerca a la raíz s.

Aunque empiece a iterar en un punto x_0 tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) \not> 0$ tenemos una **CONDICIÓN ADICIONAL**:

$$\boxed{\exists \text{ convergencia si } \max \left\{ \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq b-a}$$

* EJERCICIO:

Se considera la función $f(x) = x^2 + 2x$.

Hallar mediante Newton-Raphson el menor número positivo x con 3 decimales para el cual $f(x) = 4$.

Lo primero, particularizamos la función al caso que nos piden:

$$f(x) = x^2 + 2x = 4 \xrightarrow{\text{Por tanto}} \boxed{f(x) = x^2 + 2x - 4}$$

→ Ésta es la función con la que vamos a trabajar.

$f(x)$ tiene que cumplir las siguientes condiciones para tener garantizada la convergencia global en un intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ})\ \text{BOLZANO} \rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists s \in [a,b] \\ 2^{\circ})\ f'(x)_{[a,b]} \neq 0 \\ 3^{\circ})\ f''(x)_{[a,b]} \gtrless 0 \end{array}\right\}$$

Para comprobarlas necesito tener el intervalo $[a,b]$ que contenga la raíz. Para hallarlo voy dando valores a $f(x)$ de la siguiente manera:

x	f(x)
0	-4
1	-1
2	4

El intervalo $[a,b]$ será el $[1,2]$, pues en ese intervalo de valores de x, $f(x)$ cambia de signo.

Ahora ya podemos comprobar las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ})\ f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot 4 = -4 < 0 \\ 2^{\circ})\ f'(x)_{[1,2]} = 2x + 2 \neq 0 \quad \forall x \in [1,2] \\ 3^{\circ})\ f''(x)_{[1,2]} = 2 > 0 \quad \forall x \in [1,2] \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las condiciones ⇒ Hay convergencia.

Vamos a elegir el punto x_0:

4º) $x_0 \;/\; f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \longrightarrow$ $f''(x_0) = 2 \quad \forall x \in [1,2]$ Es positiva.

$f(x_0)$ debe ser positiva también:

$f(x_0) > 0 \Longrightarrow \underline{x_0 = 2}$

Ya tengo todo para que funcione. Vamos a empezar a iterar:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \longrightarrow$$ FÓRMULA GENERAL PARA EL MÉTODO DE N-R.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x - 4 \\ f'(x) &= 2x + 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} - 4}{2x_{n-1} + 2}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 + 2x_0 - 4}{2x_0 + 2} = 2 - \frac{4 + \cancel{4} - \cancel{4}}{4+2} = 2 - \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$¿\,|x_1 - x_0| \leq 10^{-3}\,? \longrightarrow ¿\,\underbrace{\left|\frac{4}{3} - 2\right|}_{0'66} \leq 10^{-3}\,? \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

Debo seguir iterando para acercarme más a la raíz s. Pararé cuando haya conseguido un error suficientemente pequeño:

Pararé cuando se cumpla $\rightarrow$ $\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-3}}$

EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON
ES BUENÍSIMO PARA HALLAR RAÍCES.

* COTA DE ERROR:

$$|e_n| = |x_n - s| \leq \frac{M \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2m}$$

$$M = \text{máx } |f''(x)|_{[a,b]}$$

$$m = \text{mín } |f'(x)|_{[a,b]}$$

COTA DE ERROR PARA NEWTON-RAPHSON.

¿De dónde sale esta fórmula? Vamos a verlo. (PROBLEMA 5).

Los pasos a seguir son 3:

1º) Desarrollar por Taylor de 2º grado $f(x)$ en $[x_n, x_{n-1}]$.

2º) Aplicar el Método de Newton-Raphson.

3º) Aplicar el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[x_n, s]$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ‖ punto

1º) Desarrollamos por Taylor hasta 2º grado $f(x)$

$$\boxed{1} \quad f(x_n) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})} + f''(\xi) \cdot \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2!} \quad \text{con } \xi \in [x_n, x_{n-1}]$$

Punto interior

Me sobra esta parte porque lo demás se parece a la fórmula de la cota de error que quiero demostrar.

¿Cómo me quito esa parte que me sobra? → Paso 2.

2º) Aplicamos la fórmula del método N-R a lo obtenido anteriormente:

Fórmula general de N-R $\rightarrow$ $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$;

$x_n - x_{n-1} = \dfrac{-f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$; $f'(x_{n-1}).(x_n - x_{n-1}) = -f(x_{n-1})$;

$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}).(x_n - x_{n-1}) = 0$

Sustituyo esto en la fórmula $\boxed{1}$ obtenida en el 1er paso y se me anula la parte que me sobraba.

$$f(x_n) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{=0} + f''(\xi).\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2!} ;$$

$$f(x_n) = f''(\xi).\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2!} ;$$

Lo acoto superiormente.

Tomamos módulos: $|f(x_n)| = \dfrac{|f''(\xi)|.|x_n - x_{n-1}|^2}{2!}$

$$|f(x_n)| \leq \frac{\max|f''(x)|.|x_n - x_{n-1}|^2}{2} \qquad \boxed{2}$$

Está en función de $f''(\xi)$ y quiero $f''(x)$ Paso 3.

[Mi pág. 83]

3º) Aplicamos el Teorema del Punto Medio en el intervalo $[x_n, s]$ Punto interior.

El teorema nos dice $\rightarrow$ $\cancel{f(s)} - f(x_n) = f'(\theta).(x_n - s)$ con $\theta \in [x_n, s]$;

$f(s) = 0$

$-f(x_n) = f'(\theta)(\underbrace{x_n - s}_{=e_n})$; $-f(x_n) = f'(\theta).e_n$; $|f(x_n)| = |f'(\theta)|.|e_n|$;

Lo acoto inferiormente.

$$\boxed{3} \quad |f(x_n)| \geq \min|f'(x)|.|e_n|$$

Ahora tenemos $|f(x_n)|$ acotada de 2 maneras: $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$. Las juntamos:

$$\min|f'(x)| \cdot |e_n| \leq |f(x_n)| \leq \frac{\max|f''(x)| \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2} \; ;$$

$$\min|f'(x)| \cdot |e_n| \leq \frac{\max|f''(x)| \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2} \; ;$$

$$|e_n| \leq \frac{\max|f''(x)| \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2 \cdot \min|f'(x)|}$$

$$M = \max|f''(x)|$$
$$m = \min|f'(x)|$$

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{M \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2m}}$$

C. q. d.

DESARROLLO DE LA FUNCIÓN POR TAYLOR
(NOS DA UN VALOR)

$\neq$

INTERPOLAR POR EL POLINOMIO DE TAYLOR
(APROXIMACIÓN)

* EJERCICIO:

Calcular con 3 dígitos decimales exactos el valor de $\sqrt{7}$ por el método de Newton-Raphson. Tomar como intervalo aislante (intervalo de convergencia) uno con extremos enteros y longitud unidad.

3 dígitos decimales exactos $\Rightarrow |e_n| \leq 10^{-3}$

No nos dan explícitamente una $f(x)$, pero podemos hallarla:

$$x = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x^2 - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 7}$$

Para escoger el intervalo hacemos lo de siempre: vamos dando valores y vemos cuándo cambia de signo:

x	f(x)
0	-7
1	-6
2	-3
3	2

$\Rightarrow [a,b] = [2,3]$

Comprobamos las condiciones de convergencia global en el intervalo:

1º) $f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow f(2) \cdot f(3) = (-3) \cdot 2 = -6 < 0$

2º) $f'(x)_{[a,b]} \neq 0 \rightarrow f'(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in [2,3]$

3º) $f''(x)_{[a,b]} \lesseqgtr 0 \rightarrow f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x$

Se cumplen todas las condiciones.

Vamos a escoger un x_0 apropiado:

4º) $x_0 \;/\; f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \rightarrow f''(x_0) = 2 > 0 \Rightarrow f(x_0) > 0 \Rightarrow \underline{x_0 = 3}$

Miro en la tabla de valores.

$$f(3) \cdot f''(3) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$$

Ya tengo todo lo que me afecta a la convergencia, así que la tengo asegurada.

Ahora vamos a aplicar el método N-R hasta conseguir un error $\leq 10^{-3}$.

$x_0 = 3$

$f(x_0) = 2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$|e_n| \leq 10^{-3}$

$$|e_n| \leq \frac{M \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{2m}$$

$$M = \max |f''(x)|_{[2,3]} = 2$$

$$m = \min |f'(x)|_{[2,3]} = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$|e_n| \leq \frac{\cancel{2} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2}{\cancel{2} \cdot 4} \leq 10^{-3} \; ;$$

$$|x_n - x_{n-1}|^2 \leq 2^2 \cdot 10^{-3} \; ; \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{0'004} \; ; \quad \boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq 0'06}$$

5º) Iteraciones:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 7}{2x_{n-1}} = \frac{2x_{n-1}^2 - x_{n-1}^2 + 7}{2x_{n-1}} \; ;$$

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 7}{2x_{n-1}}}$$

$x_0 = 3$

$$x_1 = \frac{3^2 + 7}{2 \cdot 3} = \frac{16}{6} = 2'6667 \qquad |x_1 - x_0| = |2'6667 - 3| = 0'3333 > 0'06$$

$$x_2 = \frac{2'6667^2 + 7}{2 \cdot 2'6667} = 2'6458 \qquad |x_2 - x_1| = |2'6458 - 2'6667| = \underline{0'0208 < 0'06}$$

Acabo de iterar cuando consigo un error de acuerdo al pedido.

$\boxed{x_2 = 2'6458}$ → Aproximación de $\sqrt{7}$ con 3 decimales exactos.

* EJERCICIO:

Se desea calcular la raíz mayor de la ecuación:

$$x^2 - 2ax + a^2 - h^2 = 0 \quad / \; h \geq 0$$

mediante el método iterativo $g(x) = \dfrac{x^2 - a^2 + h^2}{2(x-a)}$

a) Indicar si el método es de N-R.

b) Indicar el orden de convergencia del método cuando $h = 0$ y cuando $h > 0$.

ⓐ Si el método es de N-R, entonces podré obtener la $g(x)$ del enunciado partiendo de la fórmula general de N-R:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \xrightarrow{\boxed{x_n = g(x_{n-1})}} g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \; ;$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + a^2 - h^2 \\ f'(x) &= 2x - 2a \end{aligned}\right\}$$

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 2ax + a^2 - h^2}{2x - 2a} = x - \frac{(x-a)^2 - h^2}{2(x-a)} =$$

$$= \frac{2x(x-a) - (x-a)^2 + h^2}{2(x-a)} = \frac{2x^2 - \cancel{2xa} - x^2 - a^2 + \cancel{2xa} + h^2}{2(x-a)} \; ;$$

$$\boxed{g(x) = \frac{x^2 - a^2 + h^2}{2(x-a)}} \rightarrow \text{Sí, el método es de N-R.}$$

(25/1/2008)

(b) Orden de convergencia.

Vamos a ver qué condiciones cumple:

$$\left.\begin{array}{l} s = g(s) \\ g'(s) \neq 0 \end{array}\right\} \text{Condiciones para la convergencia lineal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} s = g(s) \\ g'(s) = 0 \\ g''(s) \neq 0 \end{array}\right\} \text{Condiciones para la convergencia cuadrática.}$$

Raíz mayor de $f(x) \rightarrow f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - h^2$;

$$f(x) = (x-a)^2 - h^2 = 0 ;$$

$$(x-a)^2 = h^2 ; \quad x - a = \pm h \begin{cases} \underline{x = a + h} \\ x = a - h \end{cases}$$

* ¿ $s = g(s)$?

$$x = a + h \longrightarrow s = a + h$$

$$g(s) - s = 0 ; \quad \frac{s^2 - a^2 + h^2}{2(s-a)} - s = 0 ; \quad \frac{(a+h)^2 - a^2 + h^2}{2(\cancel{a}+h-\cancel{a})} - a - h = 0 ;$$

$$\frac{\cancel{a^2} + \cancel{h^2} + \cancel{2ah} - \cancel{a^2} + \cancel{h^2} - \cancel{2ah} - \cancel{2h^2}}{2h} = 0 \quad \text{Se cumple } \underline{s = g(s)\ \forall h}$$

* ¿ $g'(s)$? ¿ $g''(s)$?

$$g(x) = \frac{x^2 - a^2 + h^2}{2(x-a)}$$

$$g'(x) = \frac{2x\cdot\cancel{2}(x-a) - (x^2 - a^2 + h^2)\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}(x-a)^2} = \frac{2x^2 - 2xa - x^2 + a^2 - h^2}{2(x-a)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + a^2 - 2ax - h^2}{2(x-a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-a)^2 - h^2}{(x-a)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-a)^2 - h^2}{(x-a)^2}$$

$h = 0$

$$g'(s) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g'(a+h)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+\cancel{h}-a)^2 - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{h^2}}{(a+\cancel{h}-a)^2} = \frac{1}{2}$$

$g'(s) = \frac{1}{2} \neq 0 \longrightarrow$ $h = 0 \Rightarrow$ CONVERGENCIA LINEAL.

$h > 0$

$$g'(s) = g'(a+h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cancel{a}+h-\cancel{a})^2 - h^2}{(\cancel{a}+h-\cancel{a})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{h^2} - \cancel{h^2}}{h^2} = 0$$

$g'(s) = 0 \longrightarrow$ No es Lineal, por lo menos será cuadrática.

$$g''(x) = \frac{2(x-a) \cdot 2(x-a)^2 - \left[(x-a)^2 - h^2\right] \cdot 4(x-a)}{4(x-a)^4} =$$

$$= \frac{4(\cancel{x-a})^3 - 4(\cancel{x-a})^3 - \cancel{4}(x-\cancel{a}) \cdot h^2}{\cancel{4}(x-a)^{\cancel{4}}} = \frac{-h^2}{(x-a)^3}, \quad h > 0$$

$$g''(s) = g''(a+h) = \frac{-h^2}{(\cancel{a}+h-\cancel{a})^3} = \frac{-h^2}{h^3} = -\frac{1}{h}$$

$g''(s) \neq 0 \longrightarrow$ $h > 0 \Rightarrow$ CONVERGENCIA CUADRÁTICA

* ORDEN DE CONVERGENCIA EN N-R:

En el método de Newton - Raphson la convergencia es cuadrática, es decir, el orden de convergencia es 2.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{f''(s)}{2f'(s)} = cte \neq 0}$$

$f(s) = 0$

Para demostrar esta expresión tenemos 2 pasos.

1º) Aplicar el Método de Newton - Raphson a x_{n+1}.

2º) Desarrollar por Taylor de 2º grado $f(x)$ en $[s, x_n]$.

1º) Aplicamos N-R.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad x_{n+1} - s = x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(Resto "s" en ambos lados).

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ;$$

$$\boxed{e_{n+1} = \frac{f'(x_n)\, e_n - f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \boxed{1}}$$

2º) Taylor de 2º grado en $[s, x_n]$.

$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)\underbrace{(s - x_n)}_{\text{Cambio de sentido}} + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (s - x_n)^2$$

Punto interior

$\xi \in [s, x_n]$

$$\underbrace{f(s)}_{=0} = f(x_n) - f'(x_n)(x_n - s) + \frac{f''(\xi)}{2!} \underbrace{(s - x_n)^2}_{\text{Cambio de sentido.}}$$

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)\underbrace{(x_n - s)}_{e_n} + \frac{f''(\xi)\overbrace{(x_n - s)}^{e_n}{}^2}{2}$$

$$\underbrace{f'(x_n)\, e_n - f(x_n)}_{\downarrow \boxed{1}} = \frac{f''(\xi)\, e_n^2}{2} \; ;$$

$$f'(x_n) \cdot e_{n+1} = \frac{f''(\xi)\, e_n^2}{2} \; ; \qquad \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \; ;$$

Tomamos límites: Para n altas $(n \to \infty)$ x_n y $\xi \to s$.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f''(s)}{2f'(s)} = cte \neq 0}$$ → Lo que queríamos demostrar.

* PROBLEMAS DEL MÉTODO N-R:

1º) Raíces múltiples.

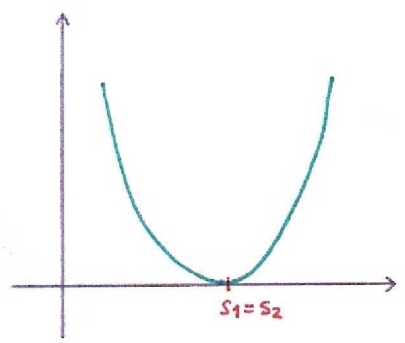
2º) $f'(x) = 0$, $f'(x) \simeq 0$.

Vamos a ver cada uno de ellos.

- Raíces múltiples:

En el ejemplo anterior: $h = 0 \Rightarrow f(x) = (x-a)^2 = 0$;

$$(x-a)(x-a) = 0 \; ; \quad \left.\begin{array}{l} s_1 = a \\ s_2 = a \end{array}\right\} s_1 = s_2$$



El método de N-R pierde la convergencia cuadrática y se queda con convergencia lineal.

Si sospecho que mi función puede tener raíces múltiples, puedo conservar la conv. cuadrática modificando el método:

Orden de multiplicidad p:

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = \dots = f^{p-1}(s) = 0$$

$$f^{p}(s) \neq 0$$

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - p \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}}$$ siendo p el nº de raíces múltiples.

- Problemas con la derivada:

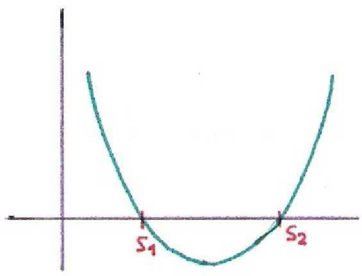
$f'(x) = 0$

$f'(x) \simeq 0$

En el ejemplo anterior: $(x-a)^2 - h^2 = 0$;

$(x-a)^2 = h^2$;

$x - a = \pm h$; $\left.\begin{array}{l} S_1 = a + h \\ S_2 = a - h \end{array}\right\} S_1 \neq S_2$



Hay que aplicar métodos sustitutivos.

11. MÉTODOS SUSTITUTIVOS.

Se utilizan cuando el método de Newton-Raphson da problemas. Son 3:

1.- WITHACKER.
2.- N-R MODIFICADO.
3.- MÉTODO DE LA SECANTE.

- WITHACKER:

Consiste en sustituir $f'(x)$ por una constante "m" del orden de magnitud de los valores de $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

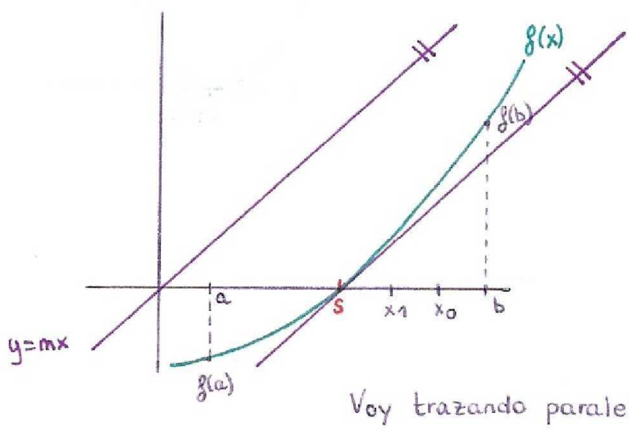
$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x)}{m}}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{m}$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{m}$

$\vdots$



Voy trazando paralelas.

- N-R MODIFICADO:

Consiste también en sustituir $f'(x)$. El método queda de la siguiente manera:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)} \quad \text{con } x_0 \simeq s}$$

x_0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)}$$

$\vdots$

- MÉTODO DE LA SECANTE: [Mi pág. 77]

Convergencia $= 1'61$

$$\boxed{x_n = \frac{x_{n-2} f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}$$ (Este método es el mejor).

* EJERCICIO :

En el cálculo de la raíz cuadrada de cualquier número positivo c ($\sqrt{c}$, $c \in \mathbb{R}^+$) se puede usar el algoritmo iterativo:

$$x_{n+1} = \frac{\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)}{2}$$

a) Comprobar si el método es de N-R.

b) Comprobar que se verifica la expresión: $x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2x_n}$

c) Demostrar que la solución generada por el algoritmo anterior es monótona decreciente y acotada para cualquier valor de x_0, $x_0 \in [\sqrt{c}, x_0]$

d) Calcular el orden de convergencia del método iterativo anterior.

e) Número de iteraciones mínimo para calcular $\sqrt{\pi}$ con $e_n \leq 10^{-6}$.

(29/1/2008)

* EJERCICIO:

Sea $f(x) = 0$, donde $f'(a) = 0$ y $f(a) \neq 0$.

a) Demostrar que si existen raíces casi iguales próximas a $x=a$, vienen dadas por:

$$x - a = \pm\sqrt{\frac{-2f(a)}{f''(a)}}$$

b) A partir del apartado a) hallar raíces próximas a 4 de:

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 15'95 = 0$$

c) Mejorar la aproximación obtenida en b) mediante N-R, deteniendo iteraciones cuando $|e_n| < 5 \cdot 10^{-5}$

(a) No sabemos cuál es la expresión de $f(x)$.
Utilizamos el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en el punto $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(\xi).(x-a)^2}{2!} \quad \text{con} \quad \xi \in [x, a]$$

Como no conocemos ξ, aproximamos esto por un polinomio de Taylor de $2^{\underline{o}}$ grado:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = 0$$

$$f'(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 = 0$$

Despejamos $x-a$ → $\boxed{x - a = \pm\sqrt{-\frac{2f(a)}{f''(a)}}}$ → Lo que queríamos demostrar.

$$\boxed{x = a \pm\sqrt{-\frac{2f(a)}{f''(a)}}}$$

(b) Ahora sí tenemos expresión para $f(x)$: $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 15'95$

Utilizando el resultado del primer apartado:

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{-2(4^3 - 7\cdot 4^2 + 8\cdot 4 + 15'95)}{6\cdot 4 - 14}} \rightarrow \begin{cases} x = 4'1 \\ x = 3'9 \end{cases}$$

x raíz cercana a $a = 4$.

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8$

$f''(x) = 6x - 14$

(c)

$$\left.\begin{array}{l} e < 5\cdot 10^{-5} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 = 4 \end{array}\right\} \text{N-R}$$

Cota de error: $\dfrac{M\cdot |x_{n+1} - x_n|^2}{2m} < 5\cdot 10^{-5}$

$M = \max \left| f''(x) = 6x - 14 \right|_{[a,b]}$

$m = \min |f'(x)|_{[a,b]} = 0 \rightarrow$ lo dice el enunciado.

Por N-R nos quedaría $\rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{\underset{f'(4) = f'(a)}{\underset{\parallel}{f'(x_0)}}} = 4 - \dfrac{f(4)}{0} \rightarrow$ NO SE PUEDE USAR N-R

Cambiamos de método:

Por el Teorema del Punto Medio:

$$f(x_n) - \underset{0}{\underset{\parallel}{f(s)}} = f'(\xi)\cdot \underbrace{(x_n - s)}_{e_n} \; ; \quad f(x_n) - \underset{0}{\underset{\parallel}{f(s)}} = f'(x_n)\cdot |e_n| \; ; \quad \boxed{|e_n| = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

OPCIÓN 1 $\rightarrow$ $x_0 = 3'9$

$x_1 = 3'9 - \dfrac{f(3'9)}{f'(3'9)}$

Si $|e_n| = \dfrac{f(3'9)}{f'(3'9)} < 5\cdot 10^{-5}$ PARO

En otro caso, SIGO ITERANDO

$x_0 = 4'1$ $\leftarrow$ OPCIÓN 2

$x_1 = 4'1 - \dfrac{f(4'1)}{f'(4'1)}$

Si $|e_n| = \dfrac{f(4'1)}{f'(4'1)} < 5\cdot 10^{-5}$ PARO

En otro caso, SIGO ITERANDO.

* EJERCICIO :

Sea la función $f(x) = 2x^2 e^{-x} - 1$ con raíz $s \in [1,2]$.

Nos planteamos 2 métodos iterativos:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \begin{cases} ① \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{x/2} \\ ② \quad g(x) = \ln(2x^2) \end{cases}$$

a) Estudiar la convergencia en $[1,2]$

b) Usando un método convergente, estimar el número mínimo de iteraciones que aseguren que, independientemente del punto inicial $x_0 \in [1,2]$ escogido, el error cometido en la estimación de la raíz s es: $|e_n| \leq 10^{-20}$.

ⓐ Vamos a estudiar la convergencia global de ambos métodos en $[1,2]$.

① $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{x/2} \longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} e^{x/2}$

Condiciones de convergencia global (**$g(x)$ MONÓTONA CRECIENTE**)

1.) $g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} \simeq 1'166 \geq 1$

$g(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e \simeq 1'922 \leq 2$

2.) $|g(x)|_{[1,2]} < 1$

$|g'(x)|_{[1,2]} = \left| \dfrac{e^{x/2}}{2\sqrt{2}} \right|_{[1,2]} < 1$

Se cumplen las condiciones.
Hay convergencia.

② $g(x) = \ln(2x^2) \longrightarrow g'(x) = \dfrac{4x}{2x^2} = \dfrac{2}{x}$

Condiciones de convergencia global (g(x) MONÓTONA CRECIENTE)

1.) $g(1) = \ln 2 \simeq 0'693 \ngeq 1$

$g(8) = \ln 8 \simeq 2'079 \nleq 2$

No se cumplen.
No es un método convergente.

2.) No es necesario comprobarla.

ⓑ Como queremos una cota de error que no dependa de x_0, usamos la fórmula del error que sólo depende del intervalo:

$$|e_n| = L^n\,|b-a| \quad \text{con} \quad L = \max |g'(x)|_{[a,b]}$$

[Mi pág. 87]

$$L = \max \left| \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{x/2} \right|_{[1,2]} = \frac{e}{2\sqrt{2}} \;;$$

$$|e_n| = \left(\frac{e}{2\sqrt{2}}\right)^n |2-1| \leqslant 10^{-20} \;; \qquad n = \frac{\ln 10^{-20}}{\ln(e/2\sqrt{2})} = 1159'4 \approx 1160 \text{ iterac.}$$

* EJERCICIO :

Se pretende construir un procedimiento iterativo que calcule los ceros de una función f, es decir, que resuelva $f(x) = 0$.

Para ello, análogamente a como se procedía en el método de la secante, en cada iteración se sustituye $f(x)$ por una función interpolante $p(x)$, de la cual sabemos calcular analíticamente sus ceros, y se calcula $p(x) = 0$.

En nuestro caso $p(x)$ va a ser un polinomio de interpolación $f(x)$ en los puntos $[x_n, f(x_n)]$, $[x_{n+1}, f(x_{n+1})]$ y $[x_{n+2}, f(x_{n+2})]$. Se pide:

a) Dar la expresión que implementa el método iterativo resultante de aplicar en cada iteración la estrategia anteriormente descrita.

NOTA.- La expresión del polinomio que interpola a $f(x)$ en $[x_n, f(x_n)]$, $[x_{n+1}, f(x_{n+1})]$ y $[x_{n+2}, f(x_{n+2})]$ es la siguiente:

$$P_0(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } \boxed{1}$$

Nótese que en cada iteración hay que dar una regla para elegir una solución de las dos posibles.

b) Aplicar dicho método y el de N-R para hallar la raíz simple $s = -2$ de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tomando como puntos iniciales:

$$x_0 = -2'6 \qquad x_1 = -2'5 \qquad x_2 = -2'4$$

$\boxed{1}$

$$a = \frac{(f(x_0) - f(x_2)) \cdot h_1 - (f(x_1) - f(x_2)) \cdot h_0}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}$$

$$b = \frac{(f(x_1) - f(x_2)) \cdot h_0^2 - (f(x_0) - f(x_2)) \cdot h_1^2}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}$$

$$c = f(x_2)$$

$$h_0 = x_0 - x_2$$

$$h_1 = x_1 - x_2$$

SOLUCION:

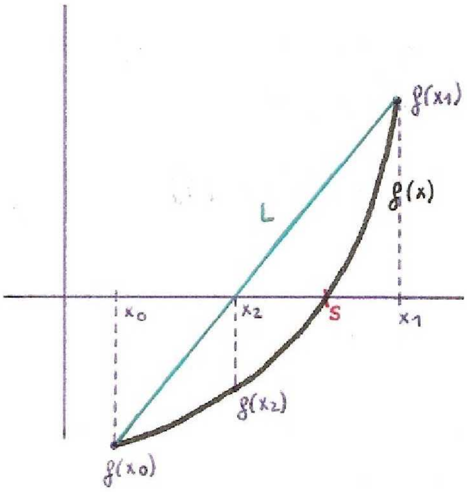
ⓐ Se trata de un método conocido como **MÉTODO DE MÜLLER**, que utiliza un polinomio de 2º grado en lugar de una recta (como hace el método de la secante).

Se parte de 3 puntos iniciales $\rightarrow x_0, x_1, x_2$.

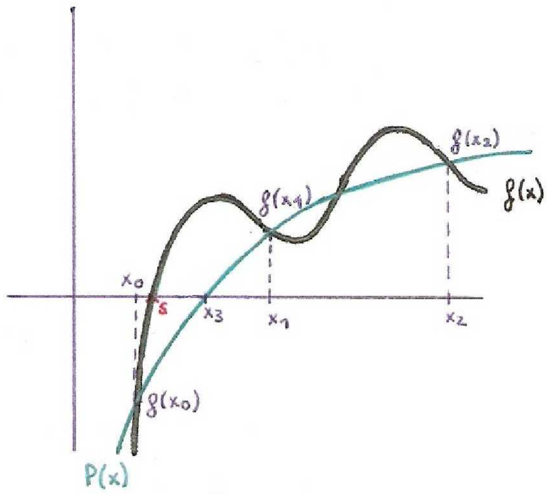
La aproximación x_3 será la solución de $P_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0$

$\downarrow$

Construido conociendo x_0, x_1, x_2



MÉTODO DE LA SECANTE



MÉTODO DE MÜLLER

$P_0(x) = 0 \Rightarrow x_3$

$$P_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0 = 0 \quad ; \quad x_3 = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}$$

Se elige $x_3 \in [x_3^+, x_3^-] \rightarrow$ Cogemos la que nos de un valor $|f(x_3)|$ más pequeño pues, como se vio en el tema, en el método de la secante los $f(x_0), f(x_1), \ldots$ eran cada vez más pequeños.

En este caso:

$$a_0 = \frac{(f(x_0)-f(x_2)).h_1 - (f(x_1)-f(x_2)).h_0}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}$$

$$b_0 = \frac{(f(x_1)-f(x_2))\,h_0^2 - (f(x_0)-f(x_2))\,h_1^2}{h_1 h_0^2 - h_0 h_1^2}$$

$$c_0 = f(x_2)$$

$$h_0 = x_0 - x_2$$

$$h_1 = x_1 - x_2$$

GENERALIZANDO:

La aproximación x_{n+1} la hallamos como solución del polinomio:

$$P_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n \rightarrow \text{Construido conociendo } x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$$

$$x_{n+3} = \frac{-b_n \pm \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n}}{2a_n} \quad \text{con } \boxed{2}$$

Se elige $x_3 \in [x_{n+3}^+, x_{n+3}^-] \rightarrow$ Cogemos la que nos proporcione un valor $|f(x_{n+3})|$ más pequeño.

$\boxed{2}$

$$a_n = \frac{(f(x_n)-f(x_{n+2})).h_{n+1} - (f(x_{n+1})-f(x_{n+2})).h_n}{h_{n+1} h_n^2 - h_n h_{n+1}^2}$$

$$b_n = \frac{(f(x_{n+1})-f(x_{n+2}))\,h_n^2 - (f(x_n)-f(x_{n+2}))\,h_{n+1}^2}{h_{n+1} h_n^2 - h_n h_{n+1}^2}$$

$$c_n = f(x_{n+2})$$

$$h_n = x_n - x_{n+2}$$

$$h_{n+1} = x_{n+1} - x_{n+2}$$

(b) Aplicando las fórmulas anteriores a $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y tomando como puntos iniciales:

$$x_0 = -2'6$$
$$x_1 = -2'5$$
$$x_2 = -2'4$$

Obtenemos:

$$x_3 = -1'98527528870725$$
$$x_4 = -2'000334062174 2$$
$$x_5 = -2'0000002184809$$
$$x_6 = -2'000000000000$$